δ) Έστω $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη

(δηλ. $\exists\, f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και είναι συνεχής)

τότε η $\bar{f}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $f(\bar{x}):=h(\|\bar{x}\|)$ συνεχώς

διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^4\setminus\{\bar{0}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}h(\|\bar{x}\|)=h'(\|\bar{x}\|)\frac{x_i}{\|\bar{x}\|},\quad \forall x\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$$

συνεχής ως προς $\bar{x}$ (δηλ. $f\in C^1(\mathbb{R}^4\setminus\{\bar{0}\})$)

Ερώτημα:

Για ποιά τιμή $h'(0)=\alpha\in\mathbb{R}$. $\exists\, \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$

- Για $\alpha\neq 0$ το όριο δεν υπάρχει.
- Για $\alpha=0$ έχουμε $h'(0)=0=\lim\limits_{z\to 0}h'(z)$

είναι φραγμένη άρα $\forall\, \bar{x}\in\mathbb{R}\setminus\{\bar{0}\}$

$$\left|\frac{x_i}{\|\bar{x}\|}\right|=\frac{1}{\|\bar{x}\|}\underbrace{|x_i|}_{\leq\|\bar{x}\|}\leq 1.$$ Άρα η $\frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$ είναι

μηδενική επί φραγμένη

άρα $\exists \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0$

ε) Εστω $n \geq 2$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{\|\bar{x}\|^n}, & \bar{x} \neq \bar{0} \\ 0, & \bar{x} = \bar{0} \end{cases}$$

Η f συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ με μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{x_1 \cdots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdots x_n (\|\bar{x}\|^2 - n x_i^2)}{\|\bar{x}\|^{n+2}}$ (αυτό προκύπτει από την παράγωγο της f) (κανόνας πηλίκου) $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Πάμε να εξετάσουμε εάν η f μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{0}+h\bar{e}_i) - f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

άρα $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\})$ ενώ η f όχι συνεχώς διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^n$ αφού $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ δεν υπάρχει.

όμως η συνάρτηση f (που είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ δηλ. και στο $\bar{x}=0$) δεν είναι συνεχής στο $\bar{x}=\bar{0}$!

(εάν $(\bar{x}_\nu) = (0, \ldots, 0, \frac{1}{\nu}, 0, \ldots, 0)$ τότε $f(\bar{x}_\nu) = 0 \longrightarrow 0$

ενώ αν $\bar{x}_\nu = (\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \ldots, \frac{1}{\nu})$ τότε

$$f(\bar{x}_\nu) = \frac{(1/\nu)^n}{(\sqrt{\frac{1}{\nu^2} \cdot n})^n} = \frac{(1/\nu)^n}{(1/\nu)^n (\sqrt{n})^n} = \frac{1}{n^{n/2}} \longrightarrow \frac{1}{n^{n/2}} \text{ σταθ.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν σε ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της f, αυτό ΔΕΝ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ ότι η f είναι συνεχής στο $\bar{x}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $\bar{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, λέγεται:

α) Μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$, αν οι $f_j : U \to \mathbb{R}$ με $j = 1, 2, \ldots, m$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

β) μερικώς διαφορίσιμη, αν οι f_j, με $j = 1, 2, \ldots$ είναι μερικώς διαφορίσιμες

γ) συνεχώς διαφορίσιμη, αν οι $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς με $i = 1, 2, \ldots n$ και $j = 1, 2, \ldots m$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν η πιο πάνω $\bar{f}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$, τότε ο πίνακας:

$$J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1(\bar{x}) & \cdots & \partial f_1/\partial x_n(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial (x_1)}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

λέγεται Ιακωβιανός πίνακας της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$